

derivar. Para esto es necesario disponer de la distribución conjunta de I_r y T_r , es decir $f_{I_r, T_r}(i_r, t_r)$. Existen varias alternativas para esta distribución conjunta.

Modelo 1: La más simple es suponer que I_r y T_r son independientes [Eagleson (1978b)], y por lo tanto la fdp conjunta es el producto de las fdps marginales (ver Ecuaciones 3.5 y 3.6), es decir

$$f_{I_r, T_r}(i_r, t_r) = \alpha e^{-\alpha i_r} \beta e^{-\beta t_r} \quad (3.15)$$

En consecuencia, la fap de H corresponde a

$$F_H(h) = \int_0^\infty \int_0^{h/t_r} f_{I_r, T_r}(i_r, t_r) di_r dt_r \quad (3.16)$$

Si se reemplaza la Ecuación 3.15 en la 3.16 se llega a

$$F_H(h) = 1 - \beta \int_0^\infty e^{-\beta t_r - \alpha h/t_r} dt_r \quad (3.17)$$

Gradshteyn y Ryzhik (1980) (Ec. 3.324-1) provee la solución de la anterior integral, es decir

$$\int_0^\infty e^{-\beta t_r - \alpha h/t_r} dt_r = 2\sqrt{\alpha h/\beta} K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta h^{1/2}} \right] \quad (3.18)$$

donde $K_1[x]$ es la función modificada de Bessel de segunda clase y de orden $n = 1$. Por lo tanto,

$$F_H(h) = 1 - 2\sqrt{\alpha\beta h^{1/2}} K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta h^{1/2}} \right] \quad (3.19)$$

La fdp de H se obtiene derivando la Ecuación 3.19 con respecto a h . Wolfram Mathematica (2020) indica que

$$\frac{d}{dx} [x^n K_n(x)] = -x^n K_{n-1}(x) \quad (3.20)$$

y por lo tanto si $x = 2(\alpha\beta h)^{1/2}$, e incluyendo la derivada interna dx/dh entonces

$$\frac{d}{dh} \left[2(\alpha\beta h)^{1/2} K_1 \left(2(\alpha\beta h)^{1/2} \right) \right] = -2\alpha\beta K_0 \left[2(\alpha\beta h)^{1/2} \right] \quad (3.21)$$

En definitiva, la fdp de H cuando I_r y T_r son independientes es

$$f_H(h) = 2\alpha\beta K_0 \left[2(\alpha\beta h)^{1/2} \right] \quad (3.22)$$

que es la misma expresión obtenida por Eagleson (1978b). El valor esperado de H y su varianza están dados por

$$m_H = \frac{1}{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

y

$$\sigma_H^2 = \frac{3}{(\alpha\beta)^2} \quad (3.24)$$

Cuando I_r y T_r no son independientes existen varias posibilidades de expresar la correlación entre estas variables en la definición de su distribución conjunta.

Modelo 2: Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) adoptan una distribución Exponencial bivariada del tipo propuesto por Nagao y Kadoya (1971):

$$f_{I_r, T_r}(i_r, t_r) = \frac{\alpha\beta}{1-\rho} \exp(-b_1 i_r - b_2 t_2) I_0 \left[\frac{2(\rho\alpha\beta i_r t_r)^{1/2}}{1-\rho} \right] \quad (3.25)$$

donde ρ es el coeficiente de correlación entre la intensidad promedio y la duración del aguacero, $I_0[x]$ es la función modificada de Bessel de primera clase y de orden cero, y $b_1 = \alpha/(1-\rho)$ y $b_2 = \beta/(1-\rho)$. Según Nagao y Kadoya (1971) y Zhang y Singh (2019) $0 < \rho < 1$, aunque Goel et al. (2000) aducen que el límite inferior de ρ es -1 . Dado que $I_0[x]$ se puede expresar con la siguiente serie [Abramowitz y Stegun (1970), Ec. 9.6.12]

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{(k!)^2} \quad (3.26)$$

Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) reemplazan la Ecuación 3.26 en la 3.25 y desarrollan la integral definida por la Ecuación 3.16 llegando a

$$F_H(h) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{n=0}^k \frac{k! h^n}{n! b_1^{k-n+1}} \int_0^{\infty} t_r^{k-n} \exp(-b_2 t_r - b_1 h t_r^{-1}) dt_r \quad (3.27)$$

con

$$\eta_k = \frac{\rho^k (\alpha\beta)^{k+1}}{(1-\rho)^{2k+1} (k!)^2} \quad (3.28)$$

La integral contenida en la Ecuación 3.27 tiene como solución [Gradshteyn y Ryzhik (1980), Ec. 3.471-9]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp(-\gamma x - \beta x^{-1}) dx = 2 \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^{\nu/2} K_{\nu} \left[2\sqrt{\beta\gamma} \right] \quad (3.29)$$

la cual conduce a

$$F_H(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \left[\frac{(k!)^2}{(b_1 b_2)^{k+1}} \right. \quad (3.30)$$

$$\left. - 2 \sum_{n=0}^k \frac{k! h^{(k+n+1)/2}}{n! (b_1 b_2)^{(k-n+1)/2}} K_{k-n+1} \left[2\sqrt{b_1 b_2 h} \right] \right]$$

cuya derivada define la fdp de H

$$f_H(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \sum_{n=0}^k \Omega_n^k \left\{ \frac{\alpha}{(1-\beta)} K_{k-n} \left[\frac{2\sqrt{\alpha\beta h}}{1-\rho} \right] \right. \quad (3.31)$$

$$\left. - n \left(\frac{\alpha}{\beta h} \right)^{1/2} K_{k-n+1} \left[\frac{2\sqrt{\alpha\beta h}}{1-\rho} \right] \right\}$$

con

$$\Omega_n^k = \frac{2k! h^{(k+n)/2} (1-\rho)^{k-n+1}}{n! (\alpha\beta)^{(k-n)/2} \alpha} \quad (3.32)$$

Si $\rho = 0$, η_k es diferente de cero solo para $k = 0$ con un valor de $\eta_0 = \alpha\beta$. De esto se deduce que en este caso particular las Ecuaciones 3.31 y 3.30 se reducen a las Ecuaciones 3.22 y 3.19, respectivamente. Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) presentan las expresiones para el valor esperado y la varianza de H , así

$$m_H = \frac{(1-\rho)^3}{\alpha\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (k+1)^2 \quad (3.33)$$

$$\sigma_H^2 = \frac{(1-\rho)^5}{(\alpha\beta)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k [(k+1)(k+2)]^2 - \frac{(1-\rho)^6}{(\alpha\beta)^2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (k+1)^2 \right]^2 \quad (3.34)$$

Si $\rho = 0$, las Ecuaciones 3.33 y 3.34 para m_H y σ_H^2 se simplifican a las Ecuaciones 3.23 y 3.24. Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) hicieron análisis con información de lluvia horaria de Denver (EEUU) y Boconó (Venezuela). Para Denver usaron el período 1949-1975 con dos grupos (15 de Mayo a 15 de Agosto con 790 aguaceros y 15 de Mayo a 15 de Junio con 226) y para Boconó tomaron el período 1975-1977 con datos comprendidos entre Mayo 1 y Noviembre 15, resultando 500 aguaceros. El criterio de identificación de aguaceros en Denver fue una separación de al menos 12 horas, mientras que en Boconó fue subjetivo pero basado en que éstos estaban bien definidos con la información disponible. Los valores muestrales de ρ fueron 0,043, 0,12 y 0,30, respectivamente (primero y segundo grupos de Denver y Boconó), los cuales indican todos una correlación efectiva positiva entre estas variables en mayor o menor grado. Concluyeron que la distribución Exponencial es una suposición adecuada para las pdfs de I_r y T_r , y que al incluir la dependencia estadística entre éstas se obtienen valores de media y desviación estándar de H más cercanos a los valores muestrales que con $\rho = 0$.

Modelo 3: Gumbel (1960) propuso diferentes distribuciones bivariadas exponenciales alternativas a la de Nagao y Kadoya (1971), dentro de las cuales Seoane et al. (2001) usan una que permite tener correlaciones negativas ($-0,25 < \rho < 0,25$) entre I_r y T_r , y cuyo estudio indica que es posible tener casos con este signo. Esta distribución está definida como

$$f_{I_r, T_r}(i_r, t_r) = \alpha\beta e^{-\alpha i_r - \beta t_r} [1 + \epsilon (2e^{-\alpha i_r} - 1) (2e^{-\beta t_r} - 1)] \quad (3.35)$$

donde $\epsilon = 4\rho$. Usando un procedimiento similar a los descritos para las Ecuaciones bivariadas 3.15 y 3.25, la fap y la fdp de H basadas en la distribución bivariada 3.35 son

$$\begin{aligned} F_h(h) = & 1 - 2\beta(1+\epsilon)\sqrt{\alpha\beta}h^{1/2}K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta}h \right] \\ & + 4\epsilon\sqrt{2\alpha\beta}h^{1/2}K_1 \left[2\sqrt{2\alpha\beta}h \right] \\ & - 4\epsilon\sqrt{\alpha\beta}h^{1/2}K_1 \left[4\sqrt{\alpha\beta}h \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

y

$$\begin{aligned} f_H(h) = & -\sqrt{\alpha\beta}(1+\epsilon)h^{-1/2}K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta}h \right] + 2\alpha\beta(1+\epsilon)K_0 \left[2\sqrt{\alpha\beta}h \right] \\ & + \sqrt{\alpha\beta}(1+\epsilon)h^{-1/2}K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta}h \right] + \sqrt{8\alpha\beta\epsilon}h^{-1/2}K_1 \left[2\sqrt{2\alpha\beta}h \right] \\ & - 8\alpha\beta\epsilon K_0 \left[2\sqrt{2\alpha\beta}h \right] - \sqrt{32\alpha\beta\epsilon}h^{-1/2}K_1 \left[2\sqrt{2\alpha\beta}h \right] \\ & - 2\sqrt{\alpha\beta\epsilon}h^{-1/2}K_1 \left[4\sqrt{\alpha\beta}h \right] + 8\alpha\beta\epsilon K_0 \left[4\sqrt{\alpha\beta}h \right] \\ & + 2\sqrt{\alpha\beta\epsilon}h^{-1/2}K_1 \left[4\sqrt{\alpha\beta}h \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

respectivamente. El valor esperado y la varianza de H corresponden a

$$m_H = \frac{4 + \epsilon}{4\alpha\beta} \quad (3.38)$$

$$\sigma_H^2 = \frac{48 + 28\epsilon - \epsilon^2}{16\alpha^2\beta^2} \quad (3.39)$$

en las cuales, cuando $\rho = 0$ se obtienen las expresiones dadas por las Ecuaciones 3.23 y 3.24. La Ecuación 3.39 resulta ligeramente diferente a la propuesta por Seoane et al. (2001). Estos autores aplicaron la fdp de H descrita por la Ecuación 3.37 a cuatro estaciones de medición de lluvia ubicadas en la cuenca del arroyo Tapalqué en Argentina: tres con información diaria (separación mínima de 24 horas entre aguaceros consecutivos) y otra con información horaria (12 horas de separación mínima entre éstos). Los valores de los coeficientes muestrales de correlación entre I_r y T_r en las tres primeras estaciones fueron positivos y cercanos a 0, mientras que para la estación con información horaria (227 eventos muestrales) fue negativo (-0,278), y los análisis para este último caso indicaron que los ajustes de la fdp y la fap resultaron mejores con la distribución bivariada con correlación (Ecuación 3.35) que con la de independencia entre I_r y T_r .

Modelo 4: Otra distribución bivariada propuesta por Gumbel (1960) que es válida solo para correlaciones negativas ($-0,404 < \rho < 0$) fue aplicada por Bacchi et al. (1994) en un estudio sobre valores extremos de lluvia en Italia, donde un par de estaciones mostraron altas correlaciones negativas y donde se resalta que es factible tener casos con este signo, lo cual significa que en general a mayor duración menor intensidad promedio. En la Sección 1.5.4.2 se hizo referencia a esta distribución (ver la Ecuación 1.163 y el Ejemplo 1.23). Kurothe et al. (1997) adoptan esta misma distribución bivariada definida como

$$f_{I_r, T_r}(i_r, t_r) = \alpha\beta [(1 + \alpha\gamma i_r)(1 + \beta\gamma t_r) - \gamma] e^{-\alpha i_r - \beta t_r - \alpha\beta\gamma i_r t_r} \quad (3.40)$$

donde el parámetro γ varía entre 0 y 1 y define el coeficiente de correlación entre I_r y T_r mediante la siguiente relación

$$\rho = -1 + \int_0^\infty \frac{1}{1 + \gamma x} e^{-x} dx \quad (3.41)$$

cuya integral no tiene una solución analítica explícita. Dado que lo que normalmente se conoce es el valor de $\hat{\rho}$ estimado a partir de los datos muestrales de i_r y t_r , el autor de este libro propone la siguiente relación para estimar el valor de γ , obtenida de la evaluación numérica de la Ecuación 3.41 para valores de γ entre 0 y 1 con incrementos de 0,01, y ajuste de una regresión polinomial con $R^2 = 0,99999$

$$\gamma = a + b\hat{\rho} + c\hat{\rho}^2 + d\hat{\rho}^3 + e\hat{\rho}^4 + f\hat{\rho}^5 \quad (3.42)$$

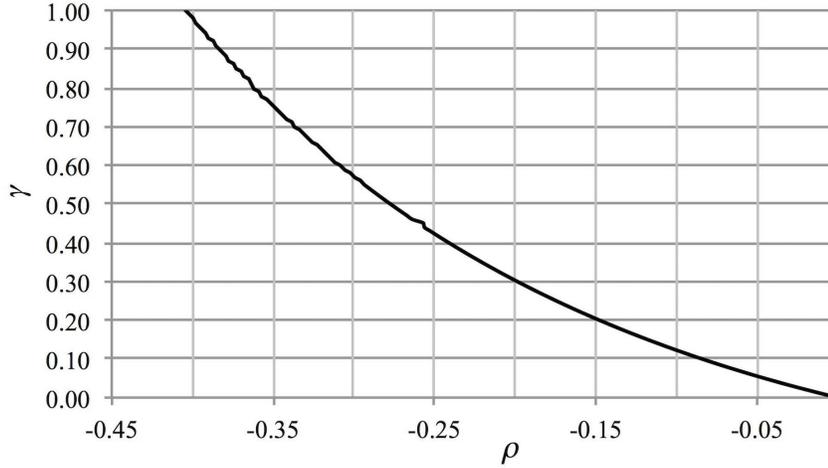
con los siguientes valores de coeficientes: $a = -0,0001654$, $b = -1,0224181$, $c = 1,4730591$, $d = -6,4028175$, $e = -11,71082$ y $f = -22,148961$. Esta relación se presenta en la Figura 3.15.

Aplicando el mismo procedimiento de los anteriores modelos para derivar la fap de H , en este caso se usan las Ecuaciones 3.16 y 3.40. La integral interna I tiene como solución

$$I = \beta e^{-\beta t_r} - \beta (1 + \alpha\gamma h/t_r) e^{-\alpha h/t_r - (\beta + \alpha\beta\gamma h/t_r)t_r} \quad (3.43)$$

Integrando la Ecuación 3.43 entre 0 e ∞ se obtiene la fap de H

$$F_h(h) = 1 - 2e^{-\alpha\beta\gamma h} \sqrt{\alpha\beta h^{1/2}} K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta h} \right] - 2\alpha\beta\gamma h e^{-\alpha\beta\gamma h} K_0 \left[2\sqrt{\alpha\beta h} \right] \quad (3.44)$$

Figura 3.15: Relación entre ρ y γ

Obsérvese que si $\gamma = 0$ esta expresión se reduce a la Ecuación 3.19 de una distribución bivariada Exponencial no correlacionada. Derivando la anterior fap con respecto a h se llega a la fdp de H

$$f_H(h) = 4(\alpha\beta)^{3/2} \gamma h^{1/2} e^{-\alpha\beta\gamma h} K_1 \left[2\sqrt{\alpha\beta h} \right] + 2\alpha\beta (1 - \gamma + \alpha\beta\gamma^2 h) e^{-\alpha\beta\gamma h} K_0 \left[2\sqrt{\alpha\beta h} \right] \quad (3.45)$$

Al igual que para la fap, si $\gamma = 0$ esta fdp se simplifica a la Ecuación 3.22. El valor esperado de H es

$$m_H = \frac{2 \left[-e^d E(2+d)/\gamma^2 + (1+d)/\gamma \right]}{\alpha\beta} + \frac{(\alpha\beta - \alpha\beta\gamma) \left[-e^d E(1+d) \right]}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} + \frac{(d^2 + 4d + 2)e^d E - d - 3}{\alpha\beta\gamma} \quad (3.46)$$

donde $d = 1/\gamma$ y E es la integral exponencial $Ei(n, x)$ con $n = 1$ y $x = d$. Es decir, $E = Ei(1, 1/\gamma)$. La integral exponencial se define como

$$Ei(n, x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt \quad (3.47)$$

cuya evaluación numérica se puede hacer con herramientas computacionales tipo Maple o Matlab. Para determinar la varianza de H se puede usar la Ecuación 1.45, para lo cual es necesario establecer $E[H^2]$, el cual resulta ser

Tabla 3.3: Valores de media y desviación estándar de H , Blonay

Parámetro	Datos	Modelos				
		1	2	3	4	5
m_H	13.32	16.54	13.06	13.06	13.06	13.32
σ_H	17.34	28.66	7.06	20.13	17.64	17.34
ρ	-0.2108	0.0	-0.2108	-0.2108	-0.2108	–

$$\begin{aligned}
 E[H^2] = & \frac{2[-e^d E(6 + 6d + d^2)/\gamma^3 + (2 + 5d + d^2)/\gamma^2]}{\alpha^2 \beta^2} \\
 & + \frac{(\alpha\beta - \alpha\beta\gamma)[e^d E(2 + 4d + d^2) - 3 - d]}{\alpha^3 \beta^3 \gamma^3} \\
 & + \frac{e^d E(6 + 18d + 9d^2 + d^3) - (11 + 8d + d^2)}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

Modelo 5: Eagleson (1978b), consciente de que el Modelo 1 es consistente con las distribuciones marginales Exponenciales para I_r y T_r , indica que la fdp de H (ver Ecuación 3.22) no es regenerativa, lo cual significa que la suma de ν aguaceros independientes provenientes de esta distribución no resulta tener una fdp tipo Bessel. Específicamente para el propósito de estimar la fap de la lluvia anual (ver Secciones 3.6 y 4.3), Eagleson (1978b) adopta para H una fdp Gamma (ver Sección 1.5.2.5) con los siguientes criterios: (1) se ajusta bien a los datos de estaciones que cubren diferentes tipos de climas, (2) es manejable analíticamente y (3) es regenerativa, es decir que la suma de ν variables aleatorias independientes Gamma con parámetros comunes l y r es también Gamma con parámetros l y νr . La estimación de parámetros de la fdp Gamma de H se puede hacer con cualquiera de los métodos presentados en la Sección 1.5.3. La distribución Exponencial, que es una particularización de la fdp Gamma, también se utiliza para representar H , por ejemplo en hidrología urbana (ver Sección 4.7.2), permitiendo desarrollar analíticamente modelos probabilísticos de desempeño de estructuras hidráulicas de control de escorrentía.

Ejemplo 3.2 Para las estaciones de lluvia Blonay y Julio Fernández, en las Figuras 3.16 y 3.17 respectivamente, se presentan las faps de los Modelos 1 a 5 de estimación de la distribución de H , junto con la distribución muestral (recuérdese que solo se han considerado los aguaceros con $h \geq 2$ mm, ver Ejemplo 3.1, razón por la cual el ajuste de los modelos es deficiente para valores bajos de h). Puede observarse que en general los modelos tienen un ajuste aceptable, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones: el Modelo 2 es estrictamente válido para $\rho > 0$; la estación Julio Fernández tiene un valor muestral de ρ de -0.357 , valor por fuera del rango válido del Modelo 3; el Modelo 5 tiene un ajuste directamente de los datos muestrales de h , a diferencia de los demás, cuyos parámetros son los ajustados a partir de los datos muestrales de i_r y t_r . Por esta razón, el Modelo 5 tiene el mejor ajuste de todos. En ambas estaciones se observa un mejor ajuste de los modelos con correlación entre I_r y T_r que con el Modelo 1 de no correlación, siendo entre éstos el Modelo 4 el de mejor concordancia con la distribución muestral. En las Tablas 3.3 y 3.4 se presentan los valores estimados de media y desviación estándar de H asociados a cada uno de los Modelos. El Modelo 1 se aparta de los valores muestrales en particular en la desviación estándar, mientras que el Modelo 2 presenta valores sustancialmente menores en este parámetro (reflejando la invalidez de su aplicación a valores de $\rho < 0$). El Modelo 3 luce adecuado para Blonay, pero para Julio Fernández no acepta valores menores que $-0,25$ apartando los estimativos de los valores muestrales. El Modelo 4 en este ejemplo es el de mejor desempeño entre los modelos que derivan la distribución de H a partir de las distribución Exponenciales de I_r y T_r .

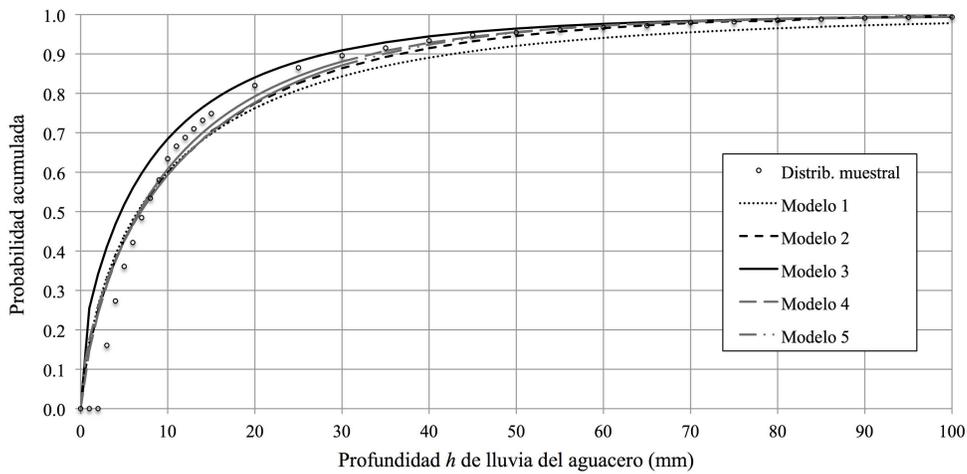


Figura 3.16: Faps de Modelos 1 a 5 - Estación Blonay

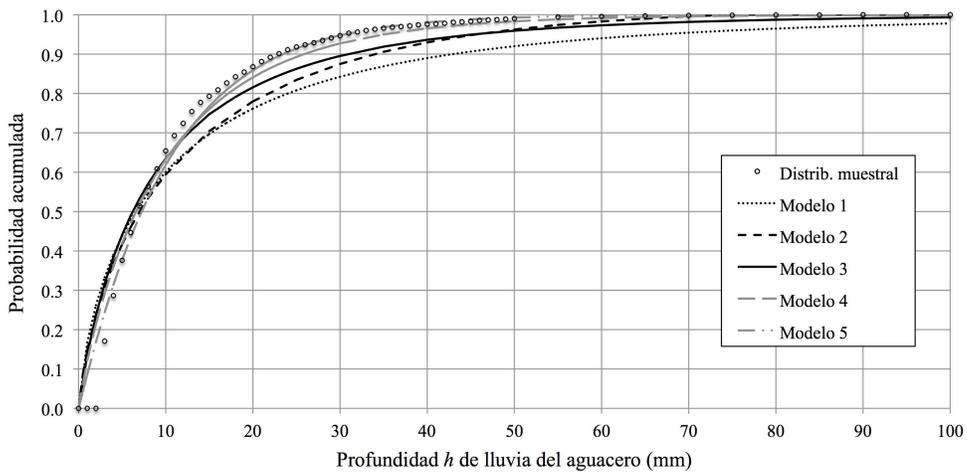


Figura 3.17: Faps de Modelos 1 a 5 - Estación Julio Fernández

Tabla 3.4: Valores de media y desviación estándar de H , Julio Fernández

Parámetro	Datos	Modelos				
		1	2	3	4	5
m_H	10.29	16.61	12.95	12.47	10.68	10.29
σ_H	10.09	28.77	4.24	18.16	12.22	10.09
ρ	-0.3568	0.0	-0.22	-0.249	-0.3568	-